



Livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS

À utiliser en cours et durant les examens
Premiers examens en 2014

Édition de 2015 (3^e version)

Table des matières

Acquis préliminaires	2
Tronc commun	3
Thème 1 – Algèbre	3
Thème 2 – Fonctions et équations	4
Thème 3 – Fonctions trigonométriques et trigonométrie	4
Thème 4 – Vecteurs	5
Thème 5 – Statistiques et probabilités	6
Thème 6 – Analyse	8
Options	10
Thème 7 – Statistiques et probabilités	10
Mathématiques complémentaires NS Thème 3	
Thème 8 – Ensembles, relations et groupes	11
Mathématiques complémentaires NS Thème 4	
Thème 9 – Analyse	11
Mathématiques complémentaires NS Thème 5	
Thème 10 – Mathématiques discrètes	12
Mathématiques complémentaires NS Thème 6	
Formules pour les distributions de probabilité	13
Thèmes 5.6, 5.7, 7.1, Mathématiques complémentaires NS Thème 3.1	
Distributions de variables aléatoires discrètes	13
Distributions de variables aléatoires continues	13
Mathématiques complémentaires	14
Thème 1 – Algèbre linéaire	14

Acquis préliminaires

Aire d'un parallélogramme	$A = b \times h$, avec b la base et h la hauteur
Aire d'un triangle	$A = \frac{1}{2}(b \times h)$, avec b la base et h la hauteur
Aire d'un trapèze	$A = \frac{1}{2}(a + b)h$, avec a et b les côtés parallèles et h la hauteur
Aire d'un cercle	$A = \pi r^2$, avec r le rayon
Circonférence d'un cercle	$C = 2\pi r$, avec r le rayon
Volume d'une pyramide	$V = \frac{1}{3}(\text{aire de la base} \times \text{hauteur verticale})$
Volume d'un parallélépipède rectangle	$V = L \times l \times h$, avec L la longueur, l la largeur et h la hauteur
Volume d'un cylindre	$V = \pi r^2 h$, avec r le rayon et h la hauteur
Aire de la surface latérale d'un cylindre	$A = 2\pi r h$, avec r le rayon et h la hauteur
Volume d'une sphère	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, avec r le rayon
Volume d'un cône	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, avec r le rayon et h la hauteur
Distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2)	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Coordonnées du milieu d'un segment d'extrémités (x_1, y_1) et (x_2, y_2)	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$
Solutions d'une équation du second degré	Les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ sont $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Thème I – Algèbre

<p>1.1</p>	<p>Le nième terme d'une suite arithmétique</p> <p>La somme des n termes d'une suite arithmétique</p> <p>Le nième terme d'une suite géométrique</p> <p>La somme de n termes d'une suite géométrique finie</p> <p>La somme d'une suite géométrique infinie</p>	$u_n = u_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ $u_n = u_1 r^{n-1}$ $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}, \quad r \neq 1$ $S_\infty = \frac{u_1}{1 - r}, \quad r < 1$
<p>1.2</p>	<p>Exposants et logarithmes</p>	$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b, \text{ où } a > 0, b > 0, a \neq 1$ $a^x = e^{x \ln a}$ $\log_a a^x = x = a^{\log_a x}$ $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
<p>1.3</p>	<p>Combinaisons</p> <p>Permutations</p> <p>Formule du binôme de Newton</p>	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \dots + b^n$
<p>1.5</p>	<p>Nombres complexes</p>	$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} = r \operatorname{cis} \theta$
<p>1.7</p>	<p>Formule de De Moivre</p>	$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta} = r^n \operatorname{cis} n\theta$

Thème 2 – Fonctions et équations

2.5	Axe de symétrie de la représentation graphique d'une fonction du second degré	$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ axe de symétrie $x = -\frac{b}{2a}$
2.6	Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$

Thème 3 – Fonctions trigonométriques et trigonométrie

3.1	Longueur d'un arc Aire d'un secteur	$l = \theta r$, où θ est l'angle mesuré en radians et r est le rayon $A = \frac{1}{2}\theta r^2$, où θ est l'angle mesuré en radians et r est le rayon
3.2	Identités Identités issues du théorème de Pythagore	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$
3.3	Identités de la somme et de la différence de deux angles Identités de l'angle double	$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$ $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

3.7	Loi des cosinus	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
	Loi des sinus	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
	Aire d'un triangle	$A = \frac{1}{2} ab \sin C$

Thème 4 – Vecteurs

4.1	Norme d'un vecteur	$ \mathbf{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, où $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
	Distance entre deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2)	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
	Coordonnées du milieu d'un segment d'extrémités (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2)	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$
4.2	Produit scalaire	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \mathbf{w} \cos \theta$, où θ est l'angle entre \mathbf{v} et \mathbf{w}
	Angle entre deux vecteurs	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$, où $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\cos \theta = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{ \mathbf{v} \mathbf{w} }$
4.3	Équation vectorielle d'une droite	$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$
	Équations paramétriques d'une droite	$x = x_0 + \lambda l$, $y = y_0 + \lambda m$, $z = z_0 + \lambda n$
	Équations symétriques d'une droite	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

4.5	Produit vectoriel	$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$
	Aire d'un triangle	$ \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \mathbf{w} \sin \theta, \text{ où } \theta \text{ est l'angle entre } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{w}$ $A = \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{w} \text{ où } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{w} \text{ forment les deux côtés d'un triangle}$
4.6	Équation vectorielle d'un plan	$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$
	Équation d'un plan (utilisant le vecteur normal)	$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$
	Équation cartésienne d'un plan	$ax + by + cz = d$

Thème 5 – Statistiques et probabilités

5.1	Paramètres de population	Soit $n = \sum_{i=1}^k f_i$
	Moyenne μ	$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$
	Variance σ^2	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \mu^2$
	Écart-type σ	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$
5.2	Probabilité d'un événement A	$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$
	Événements contraires	$P(A) + P(A') = 1$
5.3	Événements composés	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
	Événements incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5.4	Probabilité conditionnelle Événements indépendants Théorème de Bayes	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ $P(B A) = \frac{P(B)P(A B)}{P(B)P(A B) + P(B')P(A B')}$ $P(B_i A) = \frac{P(B_i)P(A B_i)}{P(B_1)P(A B_1) + P(B_2)P(A B_2) + P(B_3)P(A B_3)}$
5.5	Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X Variance Variance d'une variable aléatoire discrète X Variance d'une variable aléatoire continue X	$E(X) = \mu = \sum x P(X = x)$ $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ $\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ $\text{Var}(X) = \sum (x - \mu)^2 P(X = x) = \sum x^2 P(X = x) - \mu^2$ $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$
5.6	Distribution binomiale Moyenne Variance Distribution de Poisson Moyenne Variance	$X \sim B(n, p) \Rightarrow P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$ $E(X) = np$ $\text{Var}(X) = np(1-p)$ $X \sim \text{Po}(m) \Rightarrow P(X = x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$ $E(X) = m$ $\text{Var}(X) = m$
5.7	Variable normale centrée réduite	$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Thème 6 – Analyse

6.1	Dérivée de $f(x)$	$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$
6.2	Dérivée de x^n	$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
	Dérivée de $\sin x$	$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
	Dérivée de $\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
	Dérivée de $\tan x$	$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
	Dérivée de e^x	$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
	Dérivée de $\ln x$	$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
	Dérivée de $\sec x$	$f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
	Dérivée de $\csc x$	$f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$
	Dérivée de $\cot x$	$f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
	Dérivée de a^x	$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x (\ln a)$
	Dérivée de $\log_a x$	$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
	Dérivée de $\arcsin x$	$f(x) = \arcsin x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Dérivée de $\arccos x$	$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Dérivée de $\arctan x$	$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	
Dérivée d'une fonction composée (règle de dérivation en chaîne)	$y = g(u), \text{ où } u = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$	
Dérivée d'un produit	$y = uv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	
Dérivée d'un quotient	$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	

6.4	Intégrales classiques	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$ $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad x < a$
6.5	Aire sous une courbe Volume de révolution (rotation)	$A = \int_a^b y dx \text{ ou } A = \int_a^b x dy$ $V = \int_a^b \pi y^2 dx \text{ ou } V = \int_a^b \pi x^2 dy$
6.7	Intégration par parties	$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx \text{ ou } \int u dv = uv - \int v du$

Thème 7 – Statistiques et probabilités

Mathématiques complémentaires NS Thème 3

7.1 (3.1)	Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète X	$G(t) = E(t^x) = \sum_x P(X = x)t^x$ $E(X) = G'(1)$ $\text{Var}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$
7.2 (3.2)	Combinaison linéaire de deux variables aléatoires indépendantes X_1, X_2	$E(a_1X_1 \pm a_2X_2) = a_1E(X_1) \pm a_2E(X_2)$ $\text{Var}(a_1X_1 \pm a_2X_2) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + a_2^2 \text{Var}(X_2)$
7.3 (3.3)	Statistiques pour un échantillon Moyenne \bar{x} Variance s_n^2 Écart-type s_n Estimateur sans biais de la variance de la population s_{n-1}^2	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{n}$ $s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ $s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ $s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2$
7.5 (3.5)	Intervalles de confiance Moyenne, avec la variance connue Moyenne, avec la variance inconnue	$\bar{x} \pm z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\bar{x} \pm t \times \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$
7.6 (3.6)	Statistiques pour les tests d'hypothèse Moyenne, avec la variance connue	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

	Moyenne, avec la variance inconnue	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{n-1} / \sqrt{n}}$
7.7 (3.7)	Coefficient de corrélation de Pearson	$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$
	Statistique pour le test d'hypothèse $H_0 : \rho = 0$	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$
	Équation de la droite de régression de x fonction de y	$x - \bar{x} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2} \right) (y - \bar{y})$
	Équation de la droite de régression de y fonction de x	$y - \bar{y} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \right) (x - \bar{x})$

Thème 8 – Ensembles, relations et groupes

Mathématiques complémentaires NS Thème 4

8.1 (4.1)	Lois de De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
----------------------------	-------------------	--

Thème 9 – Analyse

Mathématiques complémentaires NS Thème 5

9.5 (5.5)	La méthode d'Euler	$y_{n+1} = y_n + h \times f(x_n, y_n)$; $x_{n+1} = x_n + h$, où h est une constante (le pas)
	Le facteur intégrant pour $y' + P(x)y = Q(x)$	$e^{\int P(x)dx}$

9.6 (5.6)	Série de Maclaurin	$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$
	Série de Taylor	$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$
	Approximation de Taylor (avec le reste $R_n(x)$)	$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x)$
	Reste de Lagrange	$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$, où c est entre a et x
	Séries de Maclaurin classiques	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$

Thème 10 – Mathématiques discrètes

Mathématiques complémentaires NS Thème 6

10.7 (6.7)	La formule d'Euler pour des graphes planaires connexes	$v - e + f = 2$, où v est le nombre de sommets, e est le nombre d'arêtes, f est le nombre de faces
	Graphes planaires, connexes, simples	$e \leq 3v - 6$ pour $v \geq 3$ $e \leq 2v - 4$ si le graphe n'a pas de triangle

Formules pour les distributions de probabilité

Thèmes 5.6, 5.7, 7.1, Mathématiques complémentaires NS Thème 3.1

Distributions de variables aléatoires discrètes

Distribution	Notation	Fonction de masse	Moyenne	Variance
Géométrique	$X \sim \text{Geo}(p)$	pq^{x-1} pour $x = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomiale négative	$X \sim \text{NB}(r, p)$	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$ pour $x = r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$

Distributions de variables aléatoires continues

Distribution	Notation	Fonction de densité	Moyenne	Variance
Normale	$X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2

Thème I – Algèbre linéaire

1.2	Déterminant d'une matrice 2×2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = \mathbf{A} = ad - bc$
	Inverse d'une matrice 2×2	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, ad \neq bc$
	Déterminant d'une matrice 3×3	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$